

# Macchine per imparare

Nel lontanissimo 1954 Skinner scriveva che un buon insegnamento è il frutto di alcuni semplici principi. Iniziare dal punto in cui si trova l'allievo senza dare nulla per scontato; non avere troppa fretta nel proseguire con un ritmo che l'allievo non è in grado di sostenere, ma rispettare il suo personale ritmo di apprendimento; non permettere mai che le risposte sbagliate restino senza correzione, né quelle giuste senza gratificazione. Partendo da simili presupposti, Skinner arriva a sostenere che le “macchine per insegnare” possono svolgere agevolmente questi compiti e rispettare queste regole precise, per certi aspetti anche meglio di un insegnante tradizionale, e sono dunque destinate a diventare strumenti essenziali nel campo dell'educazione. Spinge anzi la sua profezia fino ad affermare che se gli elaboratori elettronici fossero meno complicati, meno cari e meno ingombranti, potrebbero diventare un aiuto molto potente per l'insegnamento. (F. Celi, *Macchine per Imparare*)

# E-ducare: opinioni a confronto

Le opinioni su come **insegnare** sono strettamente legate alla visione che si ha della mente dell'uomo.

## Comportamentismo

Il **comportamentismo** è un orientamento della psicologia moderna che, nell'intento di darle uno statuto simile a quello delle scienze esatte, circoscrive il campo della ricerca all'osservazione del comportamento umano, rifiutando ogni forma di introspezione che per sua natura sfugge alla verifica oggettiva e all'osservazione diretta. **Watson**, nel 1913, affermava che gli eventi ambientali svolgono un ruolo determinante nel modellare il comportamento, che è sempre il risultato di un condizionamento che segue lo schema stimolo/risposta; ad ogni stimolo esterno corrisponde una risposta dell'organismo che, ripetuta nel tempo, determina l'apprendimento. **Skinner** sosteneva l'importanza del metodo sperimentale e riteneva che il comportamento è ordinato e sottoposto a determinate leggi; manipolando l'ambiente noi controlliamo sia il nostro comportamento che quello degli altri.

**Quando studiamo il pensiero studiamo il comportamento (Skinner)**

**Watson** e **Skinner** ritenevano anche che gli uomini fossero pressoché infinitamente malleabili, e che le conseguenze del comportamento umano fossero d'importanza cruciale. Tali ipotesi appaiono oggi ampiamente accettate, come si può giudicare dal crescente impiego, in numerosi contesti, della modificazione del comportamento e della terapia comportamentale, **nonché dal crescente timore che la scienza comportamentale possa essere usata per manipolare la gente su vasta scala.**

A questa filosofia si richiama un modello di apprendimento molto rigido, particolarmente adatto ad essere realizzato con l'aiuto di un [computer](#)

### Apprendimento programmato

- L'obiettivo didattico è definito a priori in modo rigoroso e formale.
- Le situazioni stimolo connesse con l'obiettivo didattico sono tenute il più possibile sotto controllo.
- L'obiettivo didattico, considerato troppo difficile per poter essere appreso dall'allievo tutto in una volta, viene frammentato in tanti obiettivi più piccoli, più semplici, corredati di tutti gli aiuti che possono rivelarsi utili in un determinato momento.
- Le risposte dell'allievo sono costantemente tenute sotto controllo con attenzione.
- Le risposte positive dell'allievo sono gratificate in modo sistematico e programmato.

## Innatismo

La prima formulazione esplicita dell'**innatismo** risale a **Platone**, con la sua concezione delle idee innate, che l'uomo non deve fare altro che **ricordare**; le prime critiche, invece, ad **Aristotele**, con la sua rivalutazione dell'esperienza come fonte di conoscenza.

Alla fine del Seicento da un lato abbiamo una radicale confutazione, su base empiristica, dell'innatismo da parte di **Locke**, con argomentazioni ancora oggi valide e conclusive; dall'altro lato abbiamo la riaffermazione idealistica su base razionalistica dell'innatismo da parte di **Cartesio** (la **mente** fa le veci delle **idee** di **Platone** ed è distinta dal **corpo** fisico).

**Descartes** ritiene, o finge di ritenere, che noi nasciamo con alcune idee metafisiche. Mi piacerebbe altrettanto dire che **Omero** sia nato con l'**Iliade** in testa. Quando nasciamo portiamo in noi il germe di tutto ciò che si sviluppa in noi; ma non abbiamo realmente delle idee innate più di quanto **Raffaello** e **Michelangelo** non abbiano portato, nascendo, pennelli e colori. (**Voltaire**)

**Chomsky** si posiziona sulla linea **platonico-cartesiana**, l'argomento principe che usa è di tipo piuttosto empirico. Si tratta della facilità con cui un bambino impara uno strumento complesso come il linguaggio in relativamente poco tempo ed in modo naturale e spontaneo, soprattutto paragonata alla difficoltà con cui, invece, un adulto impara una lingua straniera. Bisogna pertanto, per **Chomsky**, ritornare a **Platone** ed ipotizzare che i bambini pervengono facilmente a parlare perché la conoscenza del linguaggio è in larga misura innata. **Chomsky**, però, a differenza di **Platone** non pensa alla **teoria del ricordo**, quanto ad una fondazione biologica ed evolutzionistica di tutte quelle facoltà, strutture e disposizioni che si possono intendere come l'organo, geneticamente predeterminato, del linguaggio o facoltà del linguaggio. Questo organo (**Language Acquisition Device**) si sviluppa come gli altri organi dell'uomo: si attiva solo in base all'esposizione a fattori esterni (uso di una data lingua nell'ambiente circostante), cresce ed è pienamente funzionale solo tra i **4** ed i **12** anni, poi si atrofizza (**non gli mancava certo la fantasia**).

## Costruttivismo

Le critiche al comportamentismo permisero il passaggio ad un approccio alla psicologia dell'apprendimento detto **cognitivista** radicalmente opposto a quello **skinneriano**. Infatti si mette con forza l'accento sui processi interni e si suggerisce di tener conto dei fattori cognitivi che favoriscono il raggiungimento degli obiettivi didattici e non soltanto gli obiettivi stessi. Un particolare aspetto del cognitivismo, quasi un corollario fu il **costruttivismo**, (**Piaget, Papert**) secondo il quale l'apprendimento è visto come un impegno attivo da parte dei discenti a costruire la propria conoscenza, piuttosto che come travaso della conoscenza dalla mente del docente a quella dello studente.

Uno dei miei punti fermi centrali è che la costruzione che ha luogo “nella testa” spesso si verifica in modo particolarmente felice quando è supportata dalla costruzione di qualcosa di molto più concreto: un castello di sabbia, una torta, una casa Lego o una società, un programma di computer, una poesia, o una teoria dell'universo. Parte di ciò che intendo dire col termine “concreto” è che il prodotto può essere mostrato, discusso, esaminato, sondato e ammirato. Perché è lì e esiste. (Piaget)

## Apprendimento come scoperta

- L'obiettivo didattico non è determinato a priori.
- La situazione in cui si verifica l'apprendimento non è tenuta sotto controllo.
- L'apprendimento è (**o comunque dà l'impressione di essere**) di tipo **tutto o nulla**.
- Se non c'è bisogno di programmare gradualmente l'apprendimento né gli aiuti da erogare, non c'è più neppure bisogno di osservare e tenere sotto controllo le risposte dell'allievo.
- Naturalmente, non vi è più nessuno per gratificarlo quando dà una risposta corretta.

Il modello **costruttivista** è sicuramente molto affascinante, nella grandissima maggioranza dei casi le preferenze di un uditorio vanno al **costruttivismo**. Questo apprendimento è visto come più libero, più naturale, più rispettoso delle caratteristiche, delle motivazioni e dei bisogni profondi dell'allievo, più creativo, persino più bello: si ha l'impressione che a volte le valutazioni estetiche finiscano per prendere il sopravvento nel determinare questa preferenza.

Certamente un apprendimento frutto di una rigida programmazione presenta una serie di inconvenienti e di rischi e un modello alternativo può apparire pertanto particolarmente positivo. Quando il lavoro dell'insegnante consiste essenzialmente nel cercare di mettere qualcosa nella testa dell'allievo, uno dei primi termini che ci viene in mente per descrivere questa attività è **indottrinamento**, con tutte le connotazioni negative che la parola ha. Quando l'insegnante dà l'impressione di lavorare con l'allievo in maniera meccanica, per ottenere abilità apprese con modalità automatiche e non significative, ci spingiamo a volte fino al punto di parlare di **ammaestramento**, sottintendendo che criticiamo aspramente questi metodi che equiparano un allievo ad un animale da circo.

C'è invece un termine nobilissimo per indicare il lavoro dell'insegnante. Questo termine è **educazione**, che letteralmente significa **tirare fuori**, e che indica pertanto un modo molto diverso di intendere il rapporto insegnante-allievo. L'allievo ha già, dentro di sé, la conoscenza, e l'insegnante deve favorire l'allievo a prendere consapevolezza di questa conoscenza posseduta e a tirarla fuori.

Certamente un apprendimento di questo tipo risulterà alla fine più naturale, più significativo, più facile per l'allievo da mantenere e generalizzare a situazioni diverse. Il fascino del **costruttivismo**, tuttavia, **non deve renderci ciechi di fronte ai suoi limiti e ai suoi pericoli**.

Se un allievo ha le capacità di costruire da solo la propria conoscenza, allora tutti i **trucchi** e le strategie messe in atto dagli amanti della programmazione didattica sono peggio che inutili. Sono una perdita di tempo e un intralcio all'apprendimento autonomo e significativo.

Ma cosa facciamo quando un allievo non possiede queste capacità?

La risposta del costruttivismo radicale rischia di essere: **nulla**. In un lavoro del 1968, **Chomsky**, a sostegno delle sue tesi, arriva a riesumare il punto di vista di un medico spagnolo del XVI secolo (**Juan Huarte**) per venirci ad insegnare che o un individuo possiede le qualità necessarie per costruire la sua competenza linguistica oppure non le possiede, e in questo caso è irrecuperabile.

Cosa facciamo di quegli allievi che non riescono ad imparare da soli? Il **costruttivismo** può diventare l'alibi per scaricare l'insegnante delle sue responsabilità. Anche di questo atteggiamento troviamo traccia nella lingua. A volte un professore dice rassegnato: **non si può cavare sangue da una rapa**. Sotto questa espressione c'è l'idea, più o meno consapevole, che la conoscenza è dentro l'allievo (oppure non c'è).

La conseguenza pratica di questo assunto teorico è molto ovvia e molto penalizzante per i meno dotati: visto che il sapere non deve essere messo dentro l'allievo, ma solo tirato fuori dopo che l'allievo stesso se lo è autonomamente costruito, quando questo sapere non c'è non resta niente da fare.

Dobbiamo obiettare che certamente i metodi per promuovere apprendimento di tipo meccanico o scarsamente significativo non sono l'ideale, hanno molti limiti e, anche da un punto di vista estetico sono a volte poco belli a vedersi, con tutta quella ripetizione di stimoli, con quella lentezza nei progressi, con quel bisogno continuo di gratificazioni artificiali. Certamente è preferibile, quando si può, sostituire questi metodi con altri più naturali, più adatti a promuovere apprendimenti spontanei e significativi. Ma con un allievo in difficoltà l'attesa passiva dello sbocciare di conoscenze auto-costruite non sembra la strategia migliore. Dare a queste persone una piccola spinta, e i **computer** possono darne anche di molto grandi, non è meglio che concludere **chomskyanamente** che l'educazione è impossibile?

# Computer e apprendimento programmato

L'insegnamento programmato sembra fatto apposta per essere gestito con l'aiuto di un **computer**.

L'**osservazione sistematica**, che è la bestia nera di tanti educatori costretti a tenere il conto del numero di risposte corrette consecutive, del numero di errori in ogni singolo compito, del numero di aiuti erogati e di mille altre noiosissime cose, è per il computer un'attività semplicissima.

Inoltre, la macchina non si stanca, non si fa prendere dall'ansia di svolgere il programma, non perde la pazienza e, a meno che i progettisti dell'hardware e del software non siano sadici, non dà scariche elettriche all'allievo quando sbaglia.

Nemmeno le maestre danno scariche elettriche ai bambini, ma in senso figurato può succedere che una delle regole auree dell'educazione speciale venga disattesa. La regola dice: dai un **segnale positivo forte** dopo una risposta corretta e un **segnale negativo debole** dopo un errore. Tuttavia è sufficiente guardare con sincerità dentro noi stessi ed osservare alcuni dei nostri tipici comportamenti come insegnanti, come genitori, come persone, per rendersi conto di quanto spesso ci troviamo a comportarci in modo opposto.

Il **computer** non prova stanchezza, rabbia, frustrazione, e non ha aspettative inadeguate. Se è stato programmato per gratificare le risposte corrette e ignorare quelle errate, semplicemente lo farà. La motivazione tende ad aumentare se, durante lo svolgimento, l'allievo si sente gratificato piuttosto che punito, se le sue esperienze di successo sono maggiori di quelle di fallimento. Le esperienze di successo, inoltre, la sensazione di essere all'altezza della situazione, aumentano la stima di sé che a sua volta, aumenta la motivazione ad andare avanti. Questo produce un circolo virtuoso che porta l'allievo ad impegnarsi nel compito sempre più a fondo, con sempre maggiore convinzione.

L'uso del **computer** presenta quindi tre sostanziali vantaggi.

- La **sistematicità** di cui il **computer** è capace nell'uso della gratificazione abbassa il rischio, insito nei programmi completamente gestiti dall'insegnante, che il bambino subisca una quantità eccessiva di interventi punitivi.
- Il particolare modo con cui il **computer** è in grado di presentare gli stimoli e gli esercizi riesce talvolta a trasformare la situazione didattica, altrimenti noiosa, in una specie di videogioco. A parità di condizioni, i bambini tendono a dedicare spontaneamente più tempo ad un esercizio presentato sul monitor colorato di un computer che non allo stesso esercizio presentato su un quaderno.
- I sussidi didattici tradizionali, anche i migliori, soffrono di solito di una specie di vizio di origine. Sono sussidi, dunque non tutti ne hanno bisogno, ma solo quelli che si trovano in difficoltà: per questo finiscono per generare nell'allievo che deve usarli la convinzione che lui è in qualche modo diverso dai compagni, che in qualche modo non è all'altezza. Questo di solito non succede con il **computer**. Il **computer** è visto dall'allievo come uno **strumento che usano gli adulti**, le persone in gamba, non una **stampella per handicappati**. Il **computer** può diventare persino un veicolo di socializzazione: se lasciate libero un gruppo di bambini e c'è un solo computer al quale sta lavorando un allievo, gli altri litigano per andare a lavorare con lui e per dargli una mano.

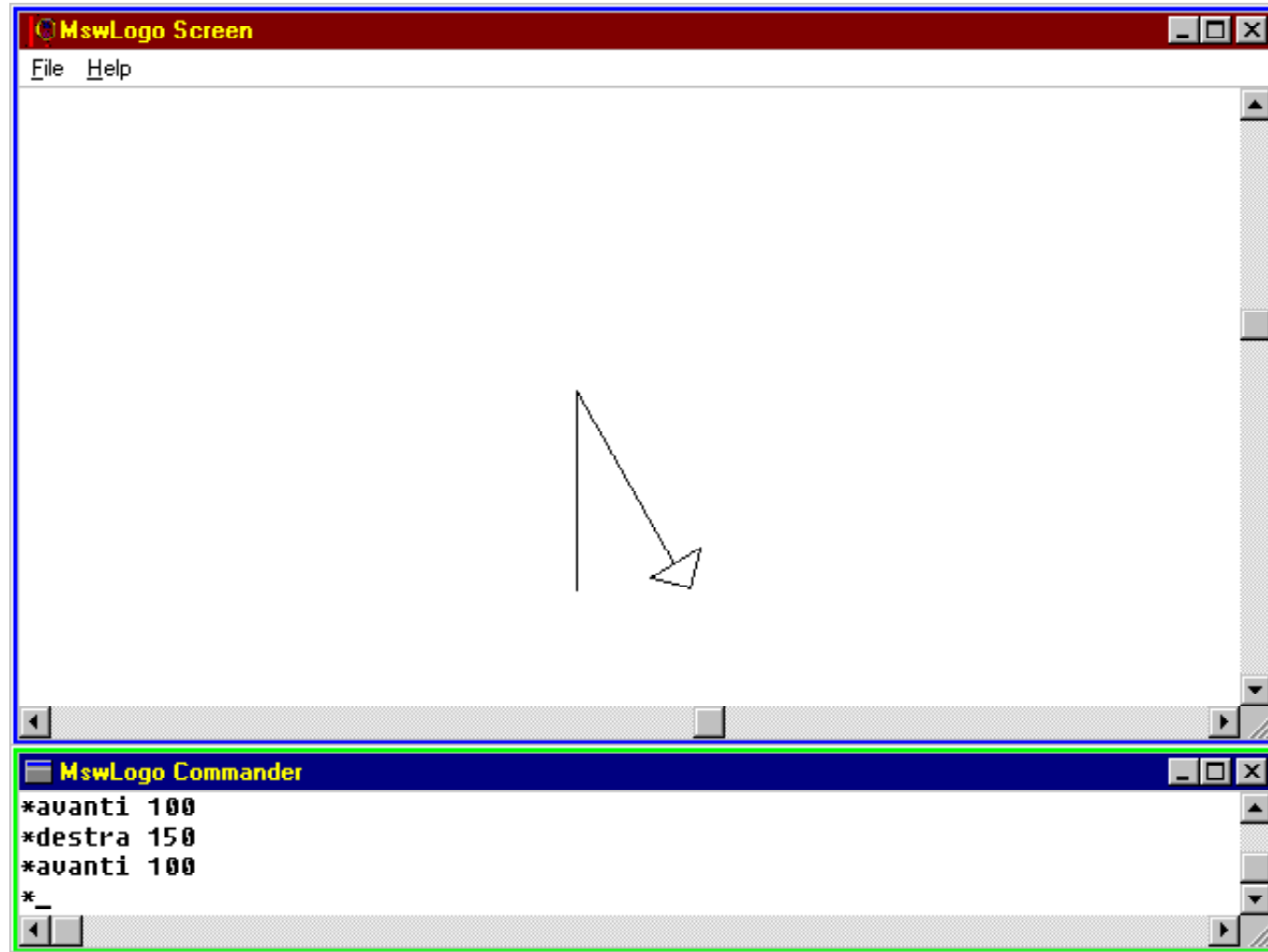
Certo, come ogni strumento, tutto dipende da come lo si usa e l'uso del **computer** nell'insegnamento programmato richiede qualche cautela. Il **computer**, deve essere inteso come un mezzo per liberare l'insegnante dei compiti più noiosi, più ripetitivi e appunto più meccanici: la scelta degli stimoli, il controllo dei passi del programma, la memorizzazione dei risultati dell'allievo, la sistematicità della gratificazione.

# Computer e apprendimento per scoperta

## IL LOGO

Uno dei modi migliori per imparare un linguaggio di programmazione è programmare e, d'altra parte, imparando a programmare si imparano molte altre cose. Programmare, nell'ottica costruttivista, è uno straordinario stimolo alla scoperta autonoma di nuove conoscenze. Ma i linguaggi "veri" sono improponibili a un bambino. Programmare in **COBOL**, o in **C** o in **Java**, presuppone una visione astratta, formale della realtà e dei problemi da risolvere. Come abbiamo visto, si tratta proprio di una visione, di un modo di pensare, di un tipo di intelligenza che il bambino non possiede ancora e che raggiungerà solo alla fine di un lungo processo. Il bambino, per pensare, ha bisogno di partire da una carrozzina da spingere o da tirare, di una pallina che rotola dietro un mobile, di un oggetto che si sposta tirando la coperta sopra cui si trova, di un liquido che passa da un recipiente alto e stretto a uno basso e largo. Questo gli aveva insegnato il suo maestro, e da qui era necessario partire. Da un oggetto concreto, reale, che si può vedere, che si muove, con il quale si può giocare come con un pupazzo, come con un pennarello, come con una scatola di costruzioni. Tutto questo dentro un piccolo universo, simulato da un **computer**, adatto a sviluppare il passaggio da un pensiero legato alla tipica concretezza del bambino ad un pensiero via via più formale, più astratto, più vicino a quello dell'adulto, del matematico, dello scienziato.

Papert chiamò **micromondo** questo piccolo universo nato per favorire l'auto-costruzione della conoscenza. Chiamò **LOGO** il linguaggio per lavorare all'interno del micromondo e poi mise al centro di questo universo una piccola **tartaruga**, capace di muoversi e di disegnare. Attraverso semplici comandi è possibile far muovere sullo schermo una **tartaruga** ovvero un punto mobile, dotato di orientamento (**la testa della tartaruga**) e capace di lasciare traccia al suo passaggio. In pratica viene implementato sullo schermo il funzionamento di un **plotter**.



*Una schermata di LOGO*

## Memorizzazione di dati e informazioni

Il [World Wide Web](#) è un'immensa enciclopedia distribuita in cui si trova (affastellato in modo disorganico) gran parte dello scibile umano.



## Simulazione e/o presentazione di mondi reali o immaginari che possono essere esplorati



*Una finestra di un programma di visualizzazione astronomica.*

## Ausilio alla creatività pura.

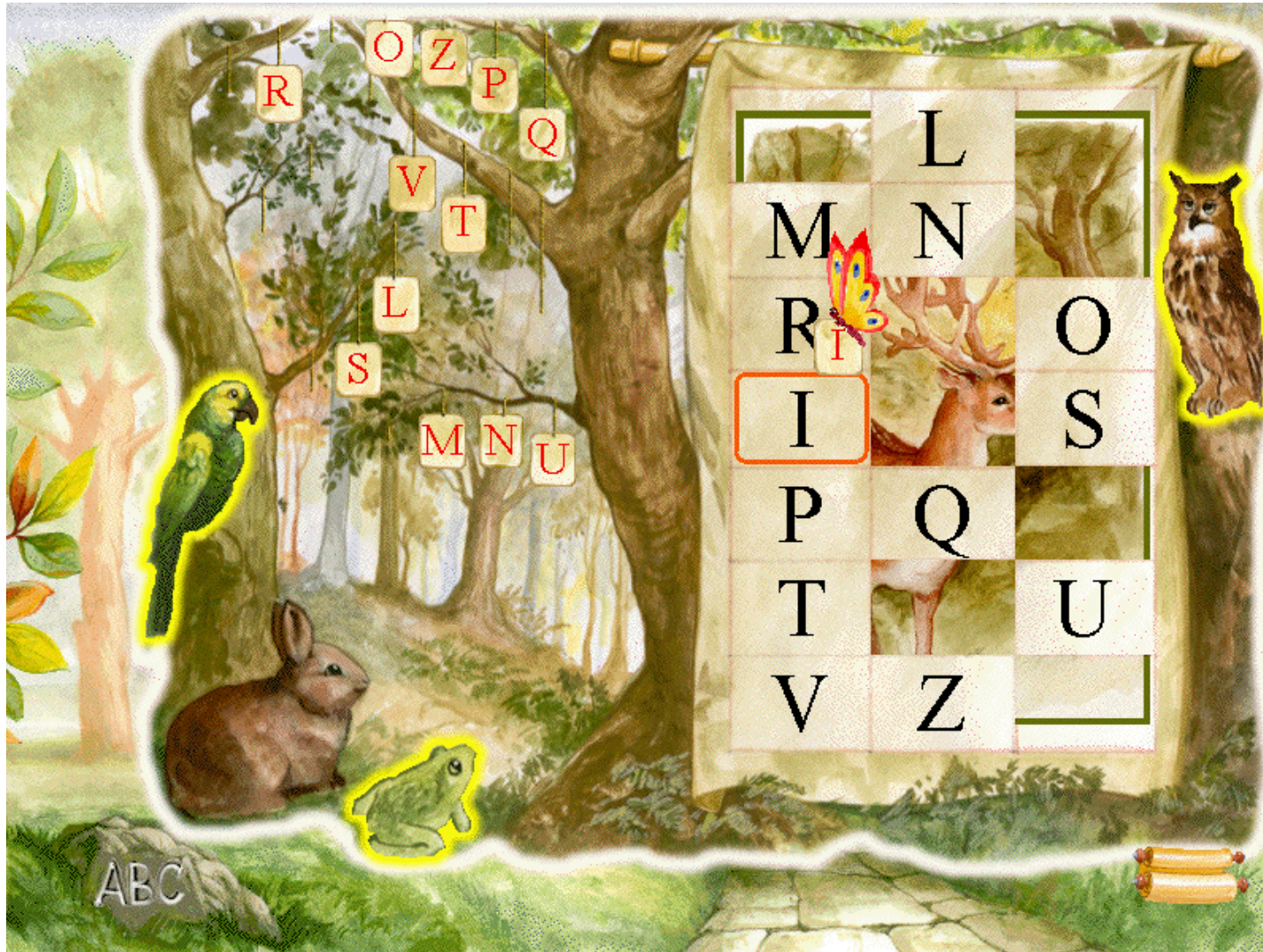
Come strumento per creare testi, animazioni, siti web, presentazioni multimediali i computer rappresentano un ausilio ormai quasi insostituibile alla fantasia e alla creatività per ogni categoria di persone, dai bambini con handicap fino ai ricercatori e agli artisti.

Gli esempi da citare sono innumerevoli

- programmi di word processing
- programmi di disegno e ritocco fotografico
- programmi per la creazione di siti web
- programmi per la creazione di filmati
- programmi di authoring multimediale

# In medio stat virtus I

Il giardino della lettura (Alberti, Celi, Laganà) è un bell'esempio di software didattico scritto avendo bene in mente i vantaggi e i pericoli di entrambi gli approcci.



Si tratta di un programma di apprendimento della lettura, basato su una accurata programmazione ma inserito in un ambiente giocoso e stimolante che l'allievo può anche esplorare liberamente.

# In medio stat virtus II

Atene 2500 anni fa. Socrate e Menone stavano discutendo di apprendimento e di educazione. Socrate, sosteneva che l'educatore si comporta come l'ostetrica, il cui unico compito è quello di tirar fuori ciò che già c'è (**e-ducere**), non di creare il bambino. Per provare questo, propose a Menone una specie di esperimento. C'era, poco distante dai due filosofi, uno schiavo **ovviamente** ignorante.

**Parla il greco?** domandò Socrate. Gli venne risposto di sì. **Bene. Allora possiamo cominciare.**

Tutto l'esperimento di Socrate serve per sostenere che il cosiddetto apprendimento non è in realtà che la rievocazione di un ricordo, e che l'insegnante non deve far altro che **tirar fuori** da un allievo una conoscenza che l'allievo **ha già dentro di sé**. Ma questo esperimento comincia con la verifica di un **prerequisito!** Socrate si accerta che l'allievo **parli la sua stessa lingua**, perché sa bene che altrimenti l'**apprendimento risulterà impossibile**.

Questa non è che la prima avvisaglia di una **sostanziale scorrettezza metodologica** che attraversa tutto l'esperimento. Fornendo allo schiavo **aiuti verbali, aiuti grafici, segnali negativi** dopo le risposte sbagliate e **segnali positivi** dopo quelle giuste alla fine arriva l'illuminazione e lo schiavo scopre che **il lato di un quadrato di area 8 corrisponde alla diagonale di un quadrato di area 4**.

L'allievo è arrivato a padroneggiare una nuova conoscenza grazie alle sue doti, alla sua curiosità, alla sua capacità di ragionare sui problemi e di cercarne una soluzione ma anche grazie ad un attento lavoro dell'insegnante, senza il quale niente di tutto questo sarebbe successo.

**In realtà l'insegnante aveva accuratamente programmato il processo di scoperta.**

Non è una contraddizione. I grandi del passato come **Archimede** e **Newton** sono arrivati da soli alle loro scoperte, ma rappresentano un'eccezione così clamorosa che dopo secoli li ricordiamo ancora.

**E in ogni caso le loro scoperte erano adeguate e conseguenti alla cultura del loro tempo**

Oggi si può imparare il principio che regola il comportamento di un corpo immerso in un liquido la legge della gravitazione universale o il calcolo infinitesimale grazie al fatto che un insegnante ci spiega le cose passo dopo passo.

**Oppure possiamo scoprire tutto da soli ricominciando da capo il cammino della civiltà.**

In pratica nessuno realizza in modo “puro” l'approccio comportamentista o quello innatista, la soluzione migliore (che, ideologie a parte, i migliori insegnanti praticano anche senza rendersene conto) è quella di fornire (spesso in modo strutturato o programmato) le basi perché specialmente i più capaci possano poi andare avanti da soli.

**Il vero scopo dell'Università non è tanto di fornire le ultime novità tecniche (che presto diverranno le penultime) quanto di stabilire le basi culturali, di metodo e di auto-organizzazione che permetteranno ai futuri professionisti di essere sempre aggiornati e all'altezza dei loro compiti.**

Come ogni buon insegnante sa, i metodi dell'istruzione e la quantità di programma svolto sono questioni di poca importanza se confrontate con la capacità di suscitare la curiosità naturale degli studenti e di stimolare il loro interesse a compiere ricerche in modo autonomo. (Chomsky)

Questa frase, apparentemente affascinante è in realtà profondamente disonesta, io direi piuttosto:

Come ogni buon insegnante sa, i metodi dell'istruzione e la quantità di programma svolto sono di fondamentale importanza per suscitare la curiosità naturale degli studenti e stimolare il loro interesse a compiere ricerche in modo autonomo.

γνώσεσθε τήν ἀλήθειαν, καὶ ἡ ἀλήθεια ἐλευθερώσει ὑμᾶς (Giovanni, 8, 32)

Conoscerete la verità e la verità vi farà liberi.

*Non è possibile essere autonomi nella ricerca del sapere (a qualunque livello) senza gli strumenti tecnici e culturali adeguati!*

Questo intero corso ne vuole essere è un esempio

# Macchine volanti e macchine per imparare

Matteo è un pilota provetto a cui piace volare. Quando è libero da altri impegni vola sul suo Piper alla ricerca di nuovi paesaggi, scopre valli, monti, fiumi e ruscelli. Queste scoperte sono rese possibili dalla libertà che il mezzo gli concede di andare dove vuole. Nessuno programma la rotta per lui. Questa libertà, tuttavia, ha un prezzo.

- Matteo ha dovuto studiare anni per conseguire il brevetto di pilota e l'ha fatto attraverso un rigido programma di apprendimento. Pilotare un aereo, infatti, non è come spostare una bici, quindi è meglio se le prime volte c'è qualcuno che ci spiega bene, passo dopo passo, cosa dobbiamo fare. Non è un caso se, per essere certi di ripetere in modo corretto le operazioni di volo, i piloti usano delle check-list strutturalmente identiche alle analisi del compito che abbiamo visto nel secondo e nel terzo capitolo.
- L'aereo di Matteo è una macchina costosa che deve essere conservata in perfetta efficienza con una manutenzione svolta secondo rigidi programmi. Anche per la manutenzione vale un discorso analogo a quello dell'addestramento. È meglio basarsi su rigorosi protocolli predeterminati che fidarsi dell'intuizione estemporanea del tipo “mi pare che le candele siano un po' sporche”.

Come ha fatto Matteo a ottenere la sua “libertà”? Ha usato in modo flessibile strumenti diversi. Per scoprire un'insenatura particolarmente suggestiva era necessario disporre liberamente di un piccolo aereo? Bene. Matteo prima ha imparato a pilotarlo seguendo un programma di addestramento preciso e dopo ha usato queste nuove conoscenze per volare dove l'ispirazione del momento lo portava.

# Ruote per la mente

Terminiamo con esempio matematico che dà un'idea abbastanza “forte” di come con una conoscenza di base appropriata si possano ottenere dal computer risultati molto significativi sul piano didattico.

*Attenzione per la delicatezza degli argomenti trattati, l'esempio che segue richiede un pubblico maturo!*

## La distribuzione dei primi

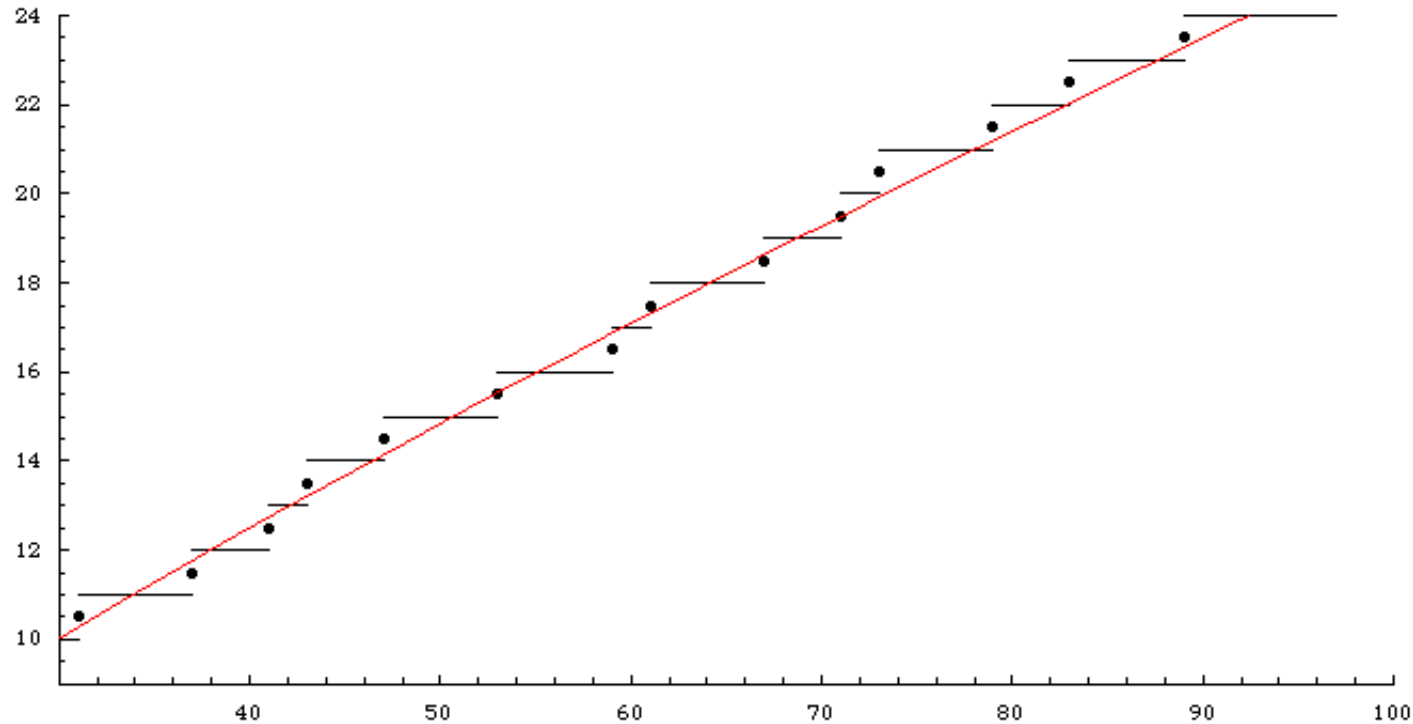
La funzione  $\pi(x)$  che rappresenta il numero di primi fino ad  $x$  ha molta importanza in matematica, Non esiste una formula chiusa semplice per  $\pi(x)$  ma ne esistono molte approssimazioni. Per esempio il **Teorema dei numeri primi** afferma che  $\pi(x)$  cresce come  $x/\log x$ .

Più precisa è la **Formula di Riemann per la distribuzione dei primi**

$$R(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\log x)^m}{m! m \zeta(m+1)}$$

dove  $\zeta(x)$  è la famigerata **Zeta di Riemann**, uno degli oggetti più affascinanti e misteriosi della matematica.

Questa approssimazione è una funzione **continua** e **monotona crescente**.



*Approssimazione a  $\pi(x)$  con la formula di Riemann .*

Purtroppo la  $\pi(x)$  è invece una funzione discontinua costante a tratti. Esiste un' approssimazione molto più sofisticata che fa entrare in gioco gli infiniti zeri non banali che la  $\zeta(x)$  possiede sulla linea critica  $x = 1/2 + i t$ .

## Formula di Riemann-Mangoldt per la distribuzione dei primi

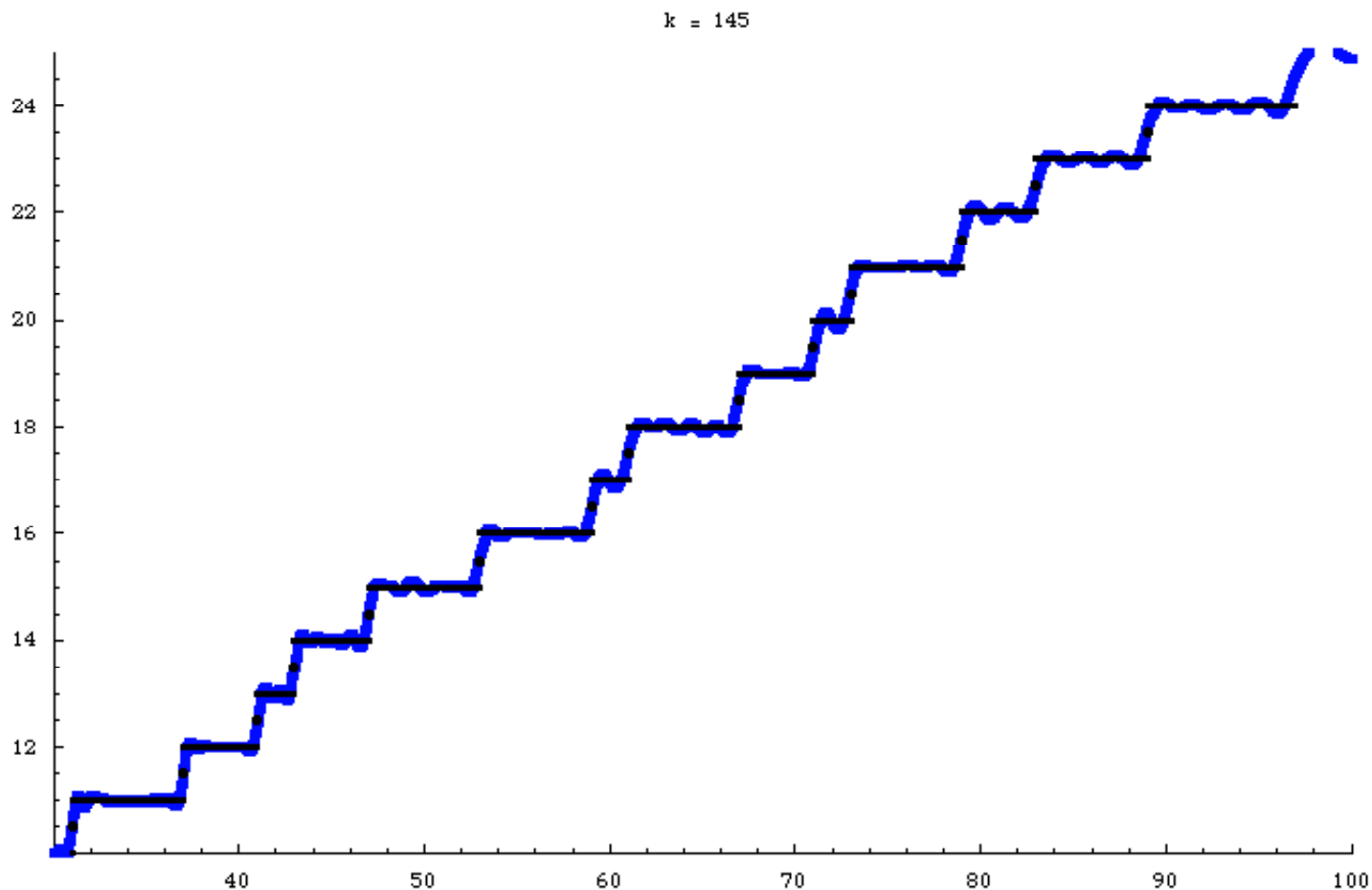
$$\pi_0(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n})$$

$$f(x) = \text{li}(x) - \sum_{\zeta(\rho)=0} \text{ei}(\rho \log x) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}$$

ovvero, con pochi **semplici** passaggi

$$\pi_0(x) = \sum_{n=1}^{\log_2 x} \frac{\mu(n)}{n} \left[ \text{li}(x^{1/n}) - \log 2 + \int_{x^{1/n}}^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} \right] +$$
$$-2 \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ \text{Im}(\rho) > 0}} \sum_{n=1}^{\log_2 x} \frac{\mu(n)}{n} \text{Re} \left( \text{ei} \left( \frac{\rho}{n} \log x \right) \right)$$

Questa formula insieme ad un buon programma di calcolo numerico e simbolico (io ho usato [Mathematica](#)), e ad una notevole dose di esperienza permette di generare una bellissima animazione che evidenzia l'influenza della collocazione degli zeri della  $\zeta(x)$  sulla distribuzione dei primi.



*Approssimazione di Riemann-Mangoldt a  $\pi(x)$  ottenuta con 145 zeri della funzione Zeta.*



*Animazione da 0 a 200 zeri.*